ejs.ecuaciones-diferenciales.pdf

albapema_

Matematicas y Estadistica

1º Grado en Farmacia

Facultad de Farmacia - Campus Álava
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

1º FARMACIA. MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES

a) $\begin{cases} (t-x)x - t^2x' = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\quad x' = \frac{(t-x)x}{t^2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{(t-x)x}{t^2}$

HOMOGÉNEA

$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \quad F(1,u)$

$F(1,u) = \frac{(1-u)u}{1}$

$F(1,u) - u = \frac{+u - u^2 - u}{1}$

$\int \frac{du}{F(1,u)-u} = \int \frac{dt}{t}$ $\quad \int \frac{du}{-u^2} = \int +\frac{dt}{t}$

$\int \frac{du}{-u^2} = \int -u^{-2}du = +\frac{1}{u}\Big]_1^u$ $\quad \int +\frac{dt}{t} = +\ln(t)\Big]_1^t + G$

cambio $u = x/t$

$\frac{t}{x} = \ln(t) + G \rightarrow$

$\rightarrow e^{t/x} = e^{\ln(t)} + G \rightarrow \boxed{e^{t/x} - t = G}$ solución general $\quad x_0 = 1, t_0 \neq 1 \rightarrow$

$e^{1/1} - 1 = G \rightarrow G \neq 0$

solución: $t = e^{(t-x)/x} \rightarrow \boxed{G = 0}$

$* \quad \frac{1}{u}\Big]_1^u = \frac{1}{u} - \frac{1}{1}$ $\quad \ln(t)\Big]_1^t = -\ln(t) - 0$

$e^{\frac{1}{u} - 1} - e^{\ln(t)} = G \rightarrow \boxed{e^{\frac{t-x}{x}} - t = G}$ solución general

$1 - 1 = 0$ $\quad \boxed{G = 0}$ solución particular

cambio $u = x/t$

$* \quad \frac{1}{u} - 1 = \frac{t-x}{x}$

b) $\begin{cases} (t^2+x^2) + txx' = 0 \\ x(1) = -1 \end{cases}$ $\quad x' = -\frac{(t^2+x^2)}{tx}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{-t^2-x^2}{tx}$

HOMOGÉNEA $\quad F(1,u) = \frac{1-u^2}{u}$ $\quad F(1,u) - u = \frac{1-u^2-u^2}{u}$

~~$\int \frac{du}{1+2u^2} = \int \frac{dt}{t}$~~

$\int \frac{u}{1+2u^2}du = \int \frac{dt}{t} \rightarrow$

$\rightarrow \int \frac{4u}{1+2u^2}du = \int -\frac{4dt}{t}$ $\quad e^{-\ln(1-2u^2)} + e^{\ln(t)^4} = G \rightarrow$

$-\ln(1-2u^2) = -4\ln(t) + G$ $\quad$ cambio $u = x/t$

$\rightarrow \frac{1}{1-2u^2} + t^4 = G \rightarrow \frac{1}{1-2\left(\frac{x}{t}\right)^2} + t^4 = G$ $\quad -\ln(t)^4\Big]_1^t =$

$= -\ln(t)^4$

$\ln(2u^2+1)\Big]_{-1}^u = \ln(2u^2+1) - \ln(3)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

cambio $u = x/t$

$2u^2 + 1 \rightarrow \frac{2x^2}{t^2} + 1$ $\quad e^{\ln\left(\frac{2x^2}{t^2}+1\right) - \ln(3)} = e^{-\ln(t)^4} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2x^2}{t^2} + 1 - 3 = \frac{1}{t^4} \rightarrow \frac{2x^2}{t^2} + t^2$

$e^{\ln\frac{2x^2}{t^2} + 1 + \ln(t^4)} = e^{\ln(3)} \rightarrow \boxed{\frac{2x^2 + t^2}{t^2} + t^4 = 3}$

c) $\begin{cases} t\,\text{sen}(x/t)\,x' = x\,\text{sen}(x/t) + t \\ x(1) = \pi/2 \end{cases}$ HOMOGÉNEA

$\frac{dx}{dt} = \frac{x\,\text{sen}(x/t) + t}{t\,\text{sen}(x/t)}$

$F(1,u) = \frac{u\,\text{sen}(u) + 1}{\text{sen}(u)}$

$F(1,u) - u = \frac{1}{\text{sen}(u)}$

$\int \text{sen}(u)\,du = \int \frac{dt}{t}$

$\int \text{sen}(u)\,du = \cos(u)\Big]_{\pi/2}^{u} \rightarrow \cos(u) - 0$

$\int \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big]_1^t \rightarrow \ln(t)$

cambio $u = x/t$

$\boxed{\cos(x/t) - \ln(t) = C}$ $\quad \boxed{C = 0}$

$\cos(x/t) + \ln(t) = C$

signo en C

d) $\begin{cases} (e^{t/x} + 1) + e^{t/x}\left(1 - \frac{t}{x}\right)x' = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$ HOMOGÉNEA

$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{t/x} + 1}{e^{t/x}(1 - t/x)}$ $\quad F(1,u) = \frac{e^{1/u} + 1}{e^{1/u}(1 - 1/u)}$

$F(1,u) - u = e^{1/u} + 1 - ue^{1/u} - \frac{e^{1/u}}{u} = 1 - ue^{1/u}$

$\int \frac{du}{1 - ue^{1/u}} = \int \frac{dt}{t}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

e) $\begin{cases}(-2t^2+4tx+x^2)x' = 6tx+2x^2 \\ x(0)=1\end{cases}$ HOMOGÉNEA

$\frac{dx}{dt} = \frac{6tx+2x^2}{-2t^2+4tx+x^2}$

$F(1,u) = \frac{6u+2u^2}{u^2+4u-2}$

$F(1,u)-u = \frac{6u+2u^2-u^3-4u^2+2u}{u^2+4u-2} =$

$= \frac{-u^3-2u^2+8u}{u^2+4u-2}$

$\int + \frac{u^2+4u-2}{u^3+2u^2-8u} du = \int -\frac{dt}{t}$

$\int \frac{u^2+4u-2}{u^3+2u^2-8u} du = \int \frac{A}{u} + \int \frac{B}{u^2+2u+4}$

Factorizamos

$u(u^2+2u-8)$

$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2} =$

$u_1 = 2 \quad u_2 = -4$

$A(u^2+2u+4)+Bu = u^2+4u+2$

$Au^2+2Au+4A+Bu = u^2+4u-2$

$Au^2 = u^2 \rightarrow A = 1$

$2u+4+Bu = 4u-2$

$Bu = 2u-6 \rightarrow B = \frac{2u-6}{u}$

$\int \frac{A}{u} + \int \frac{B}{(u-2)} + \int \frac{C}{(u+4)}$

$A(u-2)(u+4)+B(u+4)u+C(u-2)u = Au^2+2Au-8A+Bu^2+4Bu+Cu^2-2Cu$

$u^2 = Au^2+Bu^2+Cu^2$

$4u = 2Au+4Bu-2Cu$

$-2 = -8A \rightarrow A = 1/4$

$A = 1/4 \quad B = 1/2 \quad C = 1/4$

$\int \frac{1}{4u} du = \frac{1}{4}\ln(4u)$ (A)

$\int \frac{1}{2(u-2)} du = \frac{1}{2}\ln(2u-4)$

$\int \frac{1}{4(u+4)} du = \frac{1}{4}\ln(4u+16)$

$\ln\left(\sqrt[4]{(4u+16)} + \sqrt{(2u-4)} + \sqrt[4]{4u}\right)$

cambio $u = x/t$

$\ln\left(\sqrt[4]{\frac{4x}{t}+16} + \sqrt{\frac{2x}{t}-4} + \sqrt[4]{4x/t}\right)$ solución general

e) $\begin{cases}(11t^2+4tx+x^2)x' = 6tx+8x^2 \\ x(1)=1\end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{6tx+8x^2}{11t^2+4tx+x^2}$

$F(1,u) = \frac{6u+8u^2}{11+4u+u^2}$

$F(1,u)-u = \frac{6u+8u^2-11u-4u^2-u^3}{11+4u+u^2} =$

$= \frac{-u^3+4u^2-5u}{u^2+4u+11}$ factorizamos

$\int \frac{u^2+4u+11}{u^3-4u^2+5u} du = \int -\frac{dt}{t}$

$u(u^2-4u+5)$

$+\frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 1\cdot 5}}{2} =$

¡! Se resuelve con números complejos

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

a) $\begin{cases} \overbrace{(9t^2+x-1)}^{P}dt + \overbrace{(4x+t)}^{Q}dx = 0 \\ x(0)=1 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} P_x = 1 \\ Q_t = 1 \end{matrix}}$

EXACTA si $P_x = Q_t$

$\cancel{U(t,x) = \int 4x+t\,dx = \frac{4x^2}{2} + tx + g(t)}$

$\cancel{P(t,x) = U_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}[2x^2+tx+g(t)] = t+g'(t)}$

$U(t,x) = \int 9t^2+x-1\,dt = 3t^3+tx-t+f(x)$

$Q(t,x) = U_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}[3t^3+tx-t+f(x)] \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{t} + f'(x) = 4x + \cancel{t}$ $\quad f'(x) = 4x$

$f(x) = \int 4x\,dx = 2x^2$

solución general:

$\boxed{3t^3+tx-t+2x^2 = C}$ $\quad \boxed{C=2}$

b) $\begin{cases} \underbrace{\left(\frac{x}{t}\right)+6t)}_{P}dt + \underbrace{(\ln(t)-2)}_{Q}dx = 0 \\ x(1)=2 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} P_x = 1/t \\ Q_t = 1/t \end{matrix}}$ EXACTA

$U(t,x) = \int(\ln(t)-2)\,dx = x\ln(t) - 2x + g(t)$

$P(t,x) = U_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[x\ln(t)-2x+g(t)] \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{\frac{x}{t}} + g'(t) = \cancel{\frac{x}{t}} + 6t$ $\quad g'(t) = 6t$

$g(t) = \int 6t\,dt = 3t^2$

solución general:

$\boxed{x\ln(t)+3t^2-2x = C}$ $\quad \boxed{C=-1}$

c) $\begin{cases} (at+bx)dt = -(bt+cx)dx \\ x(1)=2 \end{cases}$ $\quad \underbrace{(at+bx)}_{P}dt + \underbrace{(bt+cx)}_{Q}dx = 0$

$\boxed{P_x = b \quad Q_t = b}$ EXACTA

$U(t,x) = \int(at+bx)dt = \frac{at^2}{2} + bxt + f(x)$

$Q(t,x) = U_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{at^2}{2}+bxt+f(x)\right] \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{bt} + f'(x) = \cancel{bt} + cx$ $\quad f'(x) = cx$ $\quad f(x) = \int cx\,dx = \frac{cx^2}{2}$

solución general: $\boxed{\frac{at^2}{2} + bxt + \frac{cx^2}{2} = C}$ $\quad \boxed{C = \frac{a}{2} + 2b + 2c}$

d) $\begin{cases} \overbrace{(3t^2x+2tx+x^3)}^{P}dt + \underbrace{(t^2+x^2)}_{Q}dx = 0 \\ x(0)=2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} P_x = 3t^2+2t+3x^2 \\ Q_t = 2t \end{matrix} \neq$

buscamos factor integrante

$\frac{\cancel{2t}-3t^2-\cancel{2t}-3x^2}{t^2+x^2} = \frac{-3(t^2+x^2)}{t^2+x^2}$ $\quad e^{-\int -3dt} = e^{+3t}$

$\underbrace{e^{3t}(3t^2x+2tx+x^3)}_{P}dt + \underbrace{e^{3t}(t^2+x^2)}_{Q}dx = 0$ $\quad P_x = Q_t$

$U(t,x) = \int e^{3t}t^2 + e^{3t}x^2\,dx = e^{3t}t^2x + \frac{e^{3t}x^3}{3} + g(t)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

d) Exactas continuación

$U(t,x) = e^{3t}\left(tx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + g(t)$

$P(t,x) = U_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{3t}\left(tx^2+\frac{x^3}{3}\right)+g(t)\right] \longrightarrow$

$\rightarrow 3e^{3t}x^2t + e^{3t}x^3 + e^{3t}\frac{x^2}{3} + g'(t) = 3e^{3t}xt^2 + e^{3t}2tx + e^{3t}x^3$

e) $\begin{cases} dx = (e^{2t} + x - 1)dt \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad \underbrace{(e^{2t}+x-1)dt}_{P} \underbrace{- dx}_{Q} = 0$

$P_x = 1 \quad Q_t = 0$ buscamos factor integ.

$\frac{Q_t - P_x}{Q} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad e^{-t}$

$\underbrace{e^{-t}(e^{2t}+x-1)dt}_{P} \underbrace{- e^{-t}dx}_{Q} = 0 \qquad U(t,x) = \int -e^{-t}dx = xe^{-t} + g(t)$

$P(t,x) = U_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[xe^{-t} + g(t)\right] \rightarrow +xe^{-t} + g'(t)$

$xe^{-t} + g'(t) = e^t + xe^{-t} - e^{-t} \qquad g'(t) = e^t - e^{-t}$

$g(t) = \int e^t - e^{-t}dt = e^t + e^{-t}$

solución general:

$\boxed{xe^{-t} + e^t + e^{-t} = C} \qquad \boxed{C = 2}$

f) $\begin{cases} \overbrace{xdt}^{P} + \overbrace{(2tx - e^{-2x})dx}^{Q} = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$P_x = 1 \quad Q_t = 2x$

buscamos factor integrante.

$\frac{2x-1}{2tx-e^{-2x}} \neq x \qquad \frac{2x-1}{x} = \checkmark \qquad e^{\int \frac{2x-1}{x}dx} = e^{-\ln(x)+2x}$

$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \qquad \frac{xe^{2x}}{x}dt + \frac{e^{2x}}{x}(2tx - e^{-2x})dx = 0$

$e^{2x} = e^{2x} \qquad U(t,x) = \int e^{2x}dt = te^{2x} + f(x)$

$Q(t,x) = U_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[te^{2x} + f(x)\right] = 2te^{2x} + f'(x) \longrightarrow$

$\rightarrow 2te^{2x} + f'(x) = 2te^{2x} - \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x}$

$* \frac{e^{2x}}{x} \cdot (-e^{2x}) =$ $\qquad f(x) = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln(x)$

$= \frac{e^{2x}}{x} \cdot \frac{-1}{e^{2x}} =$ solución general:

$\boxed{te^{2x} - \ln(x) = C}$

$= \frac{-e^{2x}}{e^{2x}x} = -\frac{1}{x}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

¿DÍA DE CLASES infinitas?

WRIGLEY'S Orbit

masca y fluye

g) $\begin{cases} e^t dt + (e^t \cot(x) + 2x\cos(x))dx = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad P_x = 0$, $Q_t \neq 0$, $Q_t = e^t \cot(x)$

$e^{\int \frac{e^t \cot(x) - 0}{e^t \cot(x) + 2x\cos(x)}}$ ×

$\int \frac{e^t \cot(x)}{e^t} = e^{\int \cot(x)} = e^{\ln(\operatorname{sen}(x))} = \operatorname{sen}(x)$

$e^t \operatorname{sen}(x)\,dt + \operatorname{sen}(x)(e^t \cot(x) + 2x\cos(x))dx = 0$

P $\qquad$ Q

$\int e^t \operatorname{sen}(x)\,dt = \operatorname{sen}(x)e^t + f(x)$ $\quad Q(t,x) = U_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sen}(x)e^t + f(x)]$

$= \cos(x)e^t + f'(x) = e^t \cos(x) + 2x\cos(x)\operatorname{sen}(x)$

$f'(x) = 2x\cos(x)\operatorname{sen}(x)$

$f(x) = \int 2x\cos(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = \int x\operatorname{sen}(2x)\,dx = x\operatorname{sen}(2x) + \int \frac{x\cos(2x)}{2}dx =$

$u = x \quad v = -\cos(2x)/2$ $\qquad = \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{4}$

$du = dx \quad dv = \operatorname{sen}(2x)$

solución general: $\operatorname{sen}(x)e^t + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{4} = C$

$\boxed{C = 0}$

EJERCICIOS PRÁCTICAS

1-8) $\begin{cases} (\operatorname{sen}(t)+1)x' = \cos^2(t) - x\cos(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad x' = \frac{-x\cos(t) + \cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}$

LINEAL $x'(t) = a(t)x + b(t)$ $\qquad e^{\int_{t_0}^{t} a(t)dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(t)dt}\right)$

$a(t) = \frac{-\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}$ $\qquad b(t) = \frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}$

$e^{\int_0^t \frac{-\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}dt}\left(1 + \int_0^t \frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1} \cdot e^{-\int_0^t \frac{-\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}dt}\,dt\right)$

Integrales

$\int \frac{-\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1} = -\ln(\operatorname{sen}(t)+1)\Big]_0^t = -\ln(\operatorname{sen}(t)+1)$ $\qquad e^{\ln(\operatorname{sen}(t)+1)}$

$\int \frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1} \cdot \operatorname{sen}(t)+1\,dt = \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{\cos(2t)dt}{2} + \int \frac{1}{2}dt =$

$\int \frac{\cos(u)}{2}du + \int \frac{1}{2}dt = \int \frac{\cos(u)}{4}du + \int \frac{1}{2}dt = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t}{2}\Big]_0^t =$

$2t = u$
$dt = \frac{du}{2}$ $\qquad = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t}{2}$

$\frac{1}{\operatorname{sen}(t)+1} \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right) = x(t)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

1-11) $\begin{cases} 2x^2t - 3 + (2xt^2+4)x' = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{-2x^2t+3}{2xt^2+4}$

$(\underbrace{2x^2t-3}_{P})dt + (\underbrace{2xt^2+4}_{Q})dx = 0$ $\quad P_x = 4tx$ $\quad Q_t = 4tx$ $\quad$ EXACTA

$U(t,x) = \int 2x^2t - 3\,dt = \frac{2x^2t^2}{2} - 3t = x^2t^2 - 3t + f(x)$

$Q(t,x) = U_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2t^2 - 3t + f(x)\right] = 2t^2x + f'(x) \longrightarrow$

$2t^2x + f'(x) = 2xt^2 + 4$ $\quad f'(x) = 4$

$f(x) = \int 4\,dx = 4x$

solución general:

$\boxed{x^2t^2 - 3t + 4x = C}$ $\quad \boxed{C = 3}$

1-9) $\begin{cases} x(tx+1) - tx' = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{x(tx+1)}{t} \rightarrow \underbrace{x(tx+1)}_{P}dt - \underbrace{t}_{Q}dx = 0$

$P_x = 2tx + 1$ $\quad$ Buscamos factor integrante

$Q_t = -1$ $\quad \frac{-1-2tx-1}{-t} \times \quad \frac{-1-2tx-1}{x(tx+1)} = \frac{-2(tx+1)}{x(tx+1)} = \frac{-2}{x}$

$e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln(x)^{-2}} = \frac{1}{x^2}$ factor integrante

$\frac{x(tx+1)}{tx^2}dt - \frac{t}{x^2}dx = 0$ $\quad U(t,x) = \int -\frac{t}{x^2}dx = +\frac{t}{x} + g(t)$

$P(t,x) = U_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{x} + g(t)\right] = \frac{1}{x} + g'(t) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{x} + g'(t) = \frac{tx}{tx} + \frac{1}{x}$ $\quad g'(t) = 1$

$g(t) = \int dt = t$

solución general:

$\boxed{\frac{t}{x} + t = C}$ ¡REVISAR!

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

b) $\begin{cases} t\cos(x)^2 x' + \text{sen}(x)^2 \ln(2t^3) = 0 \\ x(1) = \pi/4 \end{cases}$

$$-\frac{\cos(x)^2}{\text{sen}(x)^2}\,dx = \frac{\ln(2t^3)}{t}\,dt$$

$$\int -\frac{\cos(x)^2}{\text{sen}(x)^2}\,dx = \cot(x) + x\Big|_{\pi/4}^{x} = \cot(x) + x - 1 - \frac{\pi}{4}$$ ↖ se igualan

$$\int \frac{\ln(2) + 3\ln(t)}{t}\,dt = \int \frac{z}{3}\,dz = \frac{z^2}{6} = \frac{\ln(2t^3)^2}{6}\Big|_1^t = \frac{\ln(2t^3)^2 - \ln(2)^2}{6}$$

Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}3$ $P(A^c / [A \cup B^c]) = 0{,}4$. Calcular $P(B)$

$$P(A^c/[A\cup B]) = \frac{P(A^c \cap [A\cup B^c])}{P(A\cup B^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A\cup B^c)} = \frac{P([A\cup B]^c)}{P(A\cup B^c)} =$$

$$= \frac{1 - P(A\cup B)}{P(A\cup B^c)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)}{P(A) + P(B^c) - P(A\cap B^c)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)}{P(A) + 1 - P(B) - P(A\cap B)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}4 = \frac{1 - 0{,}6 - P(B) + 0{,}3}{0{,}6 + 1 - P(B) - 0{,}6 + 0{,}3} \rightarrow P(B) = 0{,}3$$

Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}625$ y $P(A^c/[A\cup B^c]) = 0{,}2$. Serán A y B independientes?

$$P(A^c/[A\cup B]) = \frac{P(A^c \cap [A\cup B^c])}{P(A\cup B^c)} = \frac{P(A^c)P(B^c)}{P(A) + P(B^c) - P(A)P(B^c)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}375}{0{,}6 + 0{,}375 - 0{,}6 \cdot 0{,}375} = 0{,}2$$ → se cumple, por tanto los sucesos son independientes.

Un tratamiento para la esterilización de las palomas, tiene una efectividad del 90%. Si se aplica a un total de 100 palomas, calcular la probabilidad de que el número de palomas esterilizadas sea mayor que 87.

$B(100, 0{,}9)$ $\quad np = 90 > 5$ $\quad nq = 10 > 5$ se puede aproximar a una distribución normal

$P[X > 87]$ $\quad Y = N(np, npq) = N(90, 3)$

$$P[X > 87] = P[Y > 86{,}5] = P\left[N(0,1) \geq \frac{86{,}5 - 90}{3} = -1{,}16\right] =$$

$$= P[N(0,1) \leq 1{,}16] = 9870$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Una empresa asegura que su fármaco tiene una efectividad del 95%. Se aplica dicho tratamiento a 100 pacientes. Se han curado 90 de ellos. Una empresa rival afirma que la efectividad es menor que 90% y pone como prueba una muestra de 120 pacientes, de los que se han curado 115. Contrastar

$p_0 \geq 0{,}95$ $\quad \frac{\hat{p}_0 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}}} \geq -z_\alpha \Leftrightarrow \frac{0{,}9 - 0{,}95}{\sqrt{\frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{100}}} \geq -2{,}326$

$\rightarrow -2{,}29415.. \geq -2{,}326$ $\quad$ Se acepta

$p_0 < 0{,}9$ (unilateral superior)

$\frac{(115/120) - 0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{120}}} \leq 2{,}326 \rightarrow 2{,}1300.. \leq 2{,}326$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

SOL. EXAMEN EC. DIFERENCIALES GRUPO 2

a) $\begin{cases} t(x+4)x' = (x^2+1)\ln(2\sqrt{t}) \\ x(1)=0 \end{cases}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{(x^2+1)\ln(2\sqrt{t})}{t(x+4)}$

VARIABLES SEPARADAS

$$\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx = \int \ln(2\sqrt{t})\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$\int_1^t \frac{2\ln(2\sqrt{t})^2}{2t}\,dt = \int_1^t \frac{\ln(4t)}{2t}\,dt = \int \frac{z}{2}\,dz = \frac{z^2}{4} = \frac{\ln(4t)^2}{4}\Big|_1^t \rightarrow$$

$u = 1/2t \quad dv = \ln(4t) \quad \ln(4t) = z \quad \rightarrow \frac{\ln(4t)^2 - \ln(4)^2}{4}$

$du = \quad v = \frac{4}{4t} \quad \frac{4}{4t}\,dt = dz$

$$\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 4\int \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\text{arctg}(x)}\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\,\text{arctg}(x)\Big|_0^x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\,\text{arctg}(x)$$

solución:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 4\,\text{arctg}(x) = \frac{\ln(4t)^2 - \ln(4)^2}{4}}$$

b) $\begin{cases} (x^2-3tx-2t^2)x' + x^2 - tx = 0 \\ x(0)=2 \end{cases}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{xt - x^2}{x^2 - 3tx - 2t^2}$

HOMOGÉNEA

$$F(1,u) = \frac{u - u^2}{u^2 - 3u - 2} \rightarrow F(1,u) - u = \frac{u - u^2 - u^3 + 3u^2 + 2u}{u^2 - 3u - 2} =$$

$$= \frac{-u^3 + 2u^2 + 3u}{u^2 - 3u - 2} \qquad \int \frac{u^2 - 3u - 2}{-u^3 + 2u^2 + 3u}\,du = \int \frac{dt}{t} \rightarrow$$

factorizamos

$$\int \frac{u^2 - 3u - 2}{u^3 - 2u^2 - 3u}\,du = -\int \frac{dt}{t}$$

factorizamos

$u(u^2 - 2u - 3)$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1(-3)}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

$(u+1)(u-3)u$

$$\int \frac{A}{u} + \int \frac{B}{u+1} + \int \frac{C}{u-3}\,du$$

$$A(u+1)(u-3) + B(u-3)u + C(u+1)u =$$

$$= Au^2 - 2Au - 3A + Bu^2 - 3Bu + Cu^2 + Cu$$

$u^2 = Au^2 + Bu^2 + Cu^2$ $\quad A = 2/3$

$-3u = -2Au - 3Bu + Cu$ $\quad B = 1/2$

$-2 = -3A \rightarrow A = 2/3$ $\quad C = 1/6$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$$\int \frac{6\cdot 2}{3u} + \frac{6\cdot 1}{2(u+1)} + \frac{6\cdot 1}{6(u-3)}\,du = -\int \frac{6\,dt}{t} \longrightarrow$$

(A)

$$A \to \int \frac{4}{u}\,du = 4\ln(u) \qquad B \to \int \frac{3}{u+1} = 3\ln(u+1)$$

$$C \to \int \frac{1}{u-3}\,du = \ln(u-3)$$

$$\to 4\ln(u) + 3\ln(u+1) - \ln(u-3) = -6\ln(t) + G$$

agrupamos los ln:

cambio $u = x/t$

$$\ln\left(\frac{u^4 + (u+1)^3 + t6}{u-3}\right) \to \ln\left(\frac{x^4(x+t)^3}{x-3t}\right) = G \to$$

$$\to \frac{x^4(x+t)^3}{x-3t} = G$$

solución particular

$x(0) = 2 \to \boxed{G = 64}$

$$\boxed{x^4(x+t)^3 = 64(x-3t)}$$

a) $\begin{cases} x^2 + tx + 4t^2)x' + 2x^2 - 8tx = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8xt - 2x^2}{x^2 + tx + 4t^2}$$ HOMOGÉNEA

$$F(1,u) - u = \frac{-u^3 + 3u^2 - 4u}{u^2 + u + 4} \to \int \frac{u^2 + u + 4}{u^3 + 3u^2 - 4u}\,du = \int \frac{-dt}{t}$$

$u(u^2 - 4 + 3u) = 0$ $\quad u = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} \to u = 1,\ u = 4$

$$\frac{u^2 + u + 4}{u^3 + 3u^2 - 4} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+4}$$

$Au^2 + 3Au - 4A + Bu^2 + 4Bu + Cu^2 - Cu \to$

$\to u^2 = Au^2 + Bu^2 + Cu^2$

$u = 3Au + 4Bu - Cu$

$4 = -4A \to A = -1$

$A = -1$

$B = 4/5$

$C = 6/5$

$$\int 5\left(\frac{4}{5(u+4)} + \frac{6}{5(u-1)} + \left(\frac{-1}{u}\right)\right)du = \int \frac{-5\,dt}{t} \to$$

$$\to \int \left(\frac{4}{u+4} + \frac{6}{u-1} - \frac{5}{u}\right)du = 4\ln(u+4) + 6\ln(u-1) - 5\ln(u) = -5\ln(t)$$

(podemos meter el ln en G)

$$\to \ln\left(\frac{(u+4)^4(u-1)^6 t^5}{u^5}\right) = C$$

deshacemos el cambio: $u = x/t$

$$\frac{(x+4t)^4(x-t)^6}{x^5} = G$$

metemos la condición general $x(0) = 3$

$$(x+4t)^4(x-t)^6 = 243x^5 \to \boxed{G = 243}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

EXACTAS

$$\begin{cases} 2txx' = x^2 - t \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{2tx}$$

$$\underbrace{(t - x^2)}_{P}dt + \underbrace{(2tx)}_{Q}dx = 0$$

1. Comprobamos que es exacta

$P_x = -2x \qquad Q_t = 2x$

derivando respecto a "x" y a "t"

2. Buscamos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{Q_t - P_x}{Q}dt} \rightarrow e^{-\int \frac{2x - (-2x)}{2tx}dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln(t)} = \boxed{\frac{1}{t^2}}$$

3. Multiplicamos el factor integrante a P y Q.

$$\left(\frac{t - x^2}{t^2}\right)dt + \left(\frac{2tx}{t^2}\right)dx = 0 \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{t - x^2}{t^2}\right)}_{P}dt + \underbrace{\left(\frac{2x}{t}\right)}_{Q}dx = 0$$

4. Integramos la más fácil de resolver

$$U_x = \int \frac{2x}{t}dx = \underbrace{\frac{2}{t}}_{\text{cte.}}\int x\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{t} + g(t)}_{U}$$

$U_t = P$, $U_x = Q$ la solución es $\boxed{U(t,x) = C_1}$

5. Calculamos $g(t)$ derivando el resultado de la integral

$$\frac{x^2}{t} + g(t) \xrightarrow{\text{derivamos}} U_t = P \quad P = U_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2}{t} + g(t)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{0 \cdot t - x^2}{t^2} = -\frac{x^2}{t^2} + g'(t) \rightarrow -\frac{x^2}{t^2} + g'(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{x^2}{t^2}$$

$$g'(t) = \frac{1}{t}$$

$$g(t) = \int \frac{1}{t}dt \rightarrow g(t) = \ln(t)$$

$$U = -\frac{x^2}{t^2} + \ln(t)$$

$$\boxed{-\frac{x^2}{t^2} + \ln(t) = C} \qquad \boxed{C = 0}$$

LINEALES

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}(t) + 1)x' = \cos^2(t) - x\cos(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$x' = \underbrace{-\frac{x\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}}_{a(t)x} + \underbrace{\frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}}_{b(t)}$$

$$e^{\int_{to}^{t} -\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)+1}} = e^{-\ln[\operatorname{sen}(t)+1]}$$

$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sen}(t)+1}}$ $x_0 = 1$

aquí se mete t no en la exponencial to

$$\int_{to}^{t} \frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)+1} \cdot (\operatorname{sen}(t)+1)\,dt = \int_{to}^{t} \cos^2(t)\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)$$

$e^{(-)-\ln[\operatorname{sen}t+1]}$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(t)+1} \cdot \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right) = C$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

HOMOGÉNEAS

$$\begin{cases}(x^2-tx+5t^2)x' = 2x^2+3tx \\ x(0)=1\end{cases}$$

$$\int \frac{du}{F(1,u)-u} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x^2+3tx}{x^2-tx+5t^2} = F(t,x)$$

$$F(kt,kx) = \frac{2k^2+3k^2}{k^2-k^2+k^2}$$ HOMOGÉNEA

Haciendo el cambio $x = tu$

$$F(1,u) = \frac{2u^2+3u}{u^2-u+5} \qquad F(1,u)-u = \frac{2u^2+3u-u^3+u^2-5u}{u^2-u+5} \rightarrow$$

$$F(1,u)-u = -\left(\frac{u^3-3u+2u}{u^2-u+5}\right)$$

Aplicamos la fórmula

$$\int \frac{u^2-u+5}{u^3-3u^2+2u}\,du = \int -\frac{dt}{t}$$

Integramos

$$\int \frac{u^2-u+5}{u(u^2-3u+2)}\,du \longrightarrow \begin{cases}u=2 \\ u=1\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{7/2}{u-2} - \frac{5}{u-1} + \frac{5/2}{u}\right)du = \int -\frac{dt}{t} \xrightarrow{\times 2} \int \left(\frac{7}{u-2} - \frac{10}{u-1} + \frac{5}{u}\right)du = \int -\frac{2dt}{t}$$

$$\rightarrow 7\ln(u-2) - 10\ln(u-1) + 5\ln(u) = -2\ln(t) + C$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{(u-2)^7 u^5 t^2}{(u-1)^{10}}\right) = C \rightarrow \frac{(u-2)^7 u^5 t^2}{(u-1)^{10}} = C$$

cambiamos $u = x/t$

$$\frac{(x-2t)^7 x^5}{(x-t)^{10}} = C \rightarrow \boxed{C=1}$$

masca y fluye

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

DERIVACIÓN !!

$y = k$ $\quad y' = 0$

$y = x$ $\quad y' = 1$

$y = x^2$ $\quad y' = 2x$

$y = x^{hmm}$ $\quad y' = nx^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt{x}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f'(x)$

$y = \frac{1}{x}$ $\quad y' = -\frac{1}{x^2} \cdot f'(x)$

$y = \tan(x)$ $\quad y' = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot f'(x)$

$\left(\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec(x)\right)$

$y = \text{arctg}(x)$ $\quad y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot f'(x)$

$y = e^x$ $\quad y' = e^x \cdot f'(x)$

$y = a^x$ $\quad y' = a^x \cdot \ln a \cdot f'(x)$

$y = \ln(x)$ $\quad y' = \frac{1}{x} \cdot f'(x)$

$y = \log_a(x)$ $\quad y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{a} \cdot f'(x)$

$y = \text{sen}(x)$ $\quad y' = \cos(x) \cdot f'(x)$

$y = \cos(x)$ $\quad y' = -\text{sen}(x) \cdot f'(x)$

$y = \text{arcsen}(x)$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot f'(x)$

$y = \text{arccos}(x)$ $\quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot f'(x)$

¡! $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\text{tang}(x)}$

DERIVADA de la multiplicación:

$f(x) \cdot g(x) \rightarrow$ ~~$f(x)$~~ $\quad f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

DERIVADA de la división

$\frac{f(x)}{g(x)}$ digo $\rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

INTEGRALES

$$\int \frac{2}{5x-20}\,dx = \int \frac{1}{5u}\,du = \frac{2}{5}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{2}{5}\ln(u) = \frac{2}{5}\ln(5x-20) + C$$

$5x - 20 = u$

$dx = \frac{du}{5}$

$$\int \frac{\cos(x)^2}{\text{sen}(x)^2}\,dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\,dx = \cot(x) + x + C$$

$$\int \frac{\ln(2t^3)}{t}\,dt = \frac{1}{6}(\ln(2) + 3\ln(t))^2 + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(u)}\,du = \int \sec^2(u)\,du = \int (1 + \text{tg}^2(u))\,du = \text{tg}(u) + C$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2(u)}\,du = \int \text{cosec}^2(u)\,du = \int (1 + \text{cotg}^2(u))\,du = -\cot(u) + C$$

$$\int e^x \cdot \cos(e^x)\,dx = \text{sen}(e^x) + C$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

$$\int x \operatorname{sen}(x^2+5)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \operatorname{sen}(x^2+5) = \boxed{\frac{-\cos(x^2+5)}{2} + C}$$

$f'x^2+5 = 2x$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx = \int \operatorname{sen}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \boxed{-\cos(\ln(x)) + C}$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (\cos x - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x}_{(1-\operatorname{sen}(x))\cos(x)})\,dx = \boxed{\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C}$$

$\overleftarrow{1}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx + \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx =$$

$$= -\ln(\cos(x)) + \ln(\operatorname{sen}(x)) + C = \boxed{\ln(\operatorname{tg}(x)) + C}$$

$$\int \operatorname{cotg}^2(x)\,dx = \int \operatorname{cossec}^2(x) - 1\,dx = \boxed{-\cot(x) - x + C}$$

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \boxed{\frac{e^u}{2} + C} \qquad \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \boxed{\frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{2} + C}$$

$2x = u$
$dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos(z)}{2}\,dz = \frac{1}{4}\int \cos(z)\,dz =$$

$2t = z$
$dt = \frac{z}{2}$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(z) = \boxed{\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + C}$$

POR PARTES

$$\int u\,dv\,dx = uv - \int v\,du$$

simple — compleja

derivada — integral

$$\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx$$

$u = x \qquad \operatorname{sen}(x)\,dx = dv$
$du = dx \qquad -\cos(x) = v$

FRACCIONES PARCIALES

$$\int \frac{x+2}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x} + \int \frac{B\,dx}{(x-1)} \longrightarrow \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)}\,dx =$$

$$= \boxed{-2\ln(x) + 3\ln(x-1) + C}$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \longrightarrow x+2 = Ax + Bx - A$$

$$\begin{cases} x = Ax + Bx \\ 2 = -A \end{cases} \qquad \boxed{A = -2} \qquad \boxed{B = 3}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)^3}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{-\operatorname{sen}(x)z^3}\,dz = \int \frac{-1}{z^3}\,dz =$$

$\cos(x) = z$
$dx = \frac{dz}{-\operatorname{sen}(x)}$

$$= +\frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2\cos(x)^2}\Big|_0^x = \boxed{\frac{1}{2\cos(x)^2} - \frac{1}{2}}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH